

Analityczno-numeryczna metoda rozwiązywania płyt cienkich

Analytical-numerical method of solving thin plates

dr inż. Krystian Rosiński

Katedra Mechaniki Konstrukcji i Materiałów Budowlanych
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska
Politechnika Bydgoska
im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich

Bydgoszcz 2022

Publikacje

- [1] Krystian Rosiński. „Modelowanie cienkościennych układów płytowych w ujęciu makroelementowym”. *Prac. dokt. Politechnika Bydgoska*, 2021.
- [2] Mykhaylo Delyavskyy and Krystian Rosiński. “The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates”. *English. In: Applied Sciences* 10.17 (2020). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10175931. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5931>.
- [3] Mykhaylo Delyavskyy, Krystian Rosiński, Nina Zdolbicka, and Oksana Bilash. “Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler’s foundation”. *English. In: AIP Conference Proceedings* 2077.1 (2019), p. 020014. DOI: 10.1063/1.5091875.
- [4] Mykhaylo Delyavskyy and Krystian Rosiński. “Solution of non-rectangular plates with macroelement method”. *English. In: AIP Conference Proceedings* 1822.1 (2017), p. 020005. DOI: 10.1063/1.4977679.

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie do tematu pracy
- 2 Metoda rozwiązywania płyt cienkich
 - Model matematyczny cienkiej płyty izotropowej
 - Model obliczeniowy cienkiej płyty izotropowej
 - Implementacja modelu (program komputerowy)
- 3 Wyniki i analiza rezultatów
 - Przykład. Płyta trójkątna
 - Porównanie wyników z rozwiązaniem Timoszenki
- 4 Podsumowanie

Płyty cienkie

Płyty cienkie:

- $h/a \leq 1/10$, gdzie h – grubość płyty, a – mniejszy wymiar
- najczęściej stosowane w budownictwie
- do ich rozwiązania wykorzystuje się teorię Kirchhoffa

Teoria Kirchhoffa:

- daje uzasadnione i wystarczające dla praktyki rezultaty i dokładnie opisuje konstrukcje płytowe (od płyt cienkich do płyt średniej grubości)
- cechuje się niskimi kosztami obliczeniowymi w porównaniu do teorii wyższych rzędów

Płyty symetryczne i niesymetryczne

Definicja

Płyta klasyfikowana jest jako *symetryczna*, jeśli poza symetrią geometryczną, spełnia warunki symetrii właściwości mechanicznych, obciążenia zewnętrznego i warunków brzegowych. Jeżeli którykolwiek z tych warunków nie jest spełniony, to mamy płytę *niesymetryczną*.

Model matematyczny cienkiej płyty izotropowej

Model matematyczny płyty opiera się na:

- definicji makroelementu cienkiej płyty izotropowej dowolnej konfiguracji
- założeniu, że dowolny kontur płyty można aproksymować linią łamaną zamkniętą

Metoda rozwiązywania zagadnień brzegowych:

- jest metodą analityczno-numeryczną
- równanie podstawowe rozwiązano analitycznie metodą rozdzielania zmiennych
- pozostałą część zagadnienia rozwiązano przy pomocy procedur numerycznych

Rozwiązanie równania podstawowego

Stan równowagi cienkiej płyty izotropowej opisuje równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad (1)$$

gdzie:

- $w(x_1, x_2)$ – funkcja ugięcia płyty
- $q(x_1, x_2)$ – rozkład obciążenia na powierzchni górnej płyty
- D – sztywność płyty na zginanie

Rozwiązanie równania podstawowego

Weźmy wyrażenie na ugięcie płyty w postaci:

$$w = w_o + w_* \quad (2)$$

gdzie:

- w_o – całka ogólna równania jednorodnego $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$
- w_* – całka szczególna równania niejednorodnego (1)

Uwaga

Rozwiązania w_o i w_* są niezależne, co pozwala z zadaną dokładnością spełnić warunki brzegowe i powierzchniowe.

Rozwiązanie równania podstawowego

Całka	ogólna	szczególna
Węzły	brzegowe	powierzchniowe
Warunki	równowaga reakcji zewnętrznych w węzłach na brzegu płyty	równowaga reakcji wewnętrznych i obciążenia przyłożonego w węzłach na powierzchni płyty

Całka ogólna

Całka ogólna ma postać:

$$w_o(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot W_{kpsv}(x_1, x_2) \quad (3)$$

gdzie:

- R_{kpsv} – dowolne współczynniki stopnie swobody płyty podstawowej
- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – *funkcje kształtu ugięcia płyty* nie zależą bezpośrednio od jej konfiguracji
- $k = 1, \dots, K$, $p = 1, \dots, 4$, $s = 1, 2$, $v = 1, \dots, 4$

Całka ogólna

Funkcje kształtu ugięcia płyty mają postać:

$$W_{kpsv}(x_1, x_2) = B_{kpsv}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}(x_{3-s}) \quad (4)$$

gdzie:

- $B_{kpsv}(x_s)$ – funkcje bazowe modelu
- $T_{kps}(x_s)$ – funkcje trygonometryczne

Całka ogólna

Model symetryczny

$$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks} = k\pi/a_s, & p = 1 \\ \delta_{ks} = (2k-1)\pi/2a_s, & p = 2 \end{cases}$$

$$T_{kps} = \cos(\kappa_{kps} x_s)$$

$$B_{kpsv} = \begin{cases} \cosh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 1 \\ \frac{x_s}{a_s} \sinh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 2 \end{cases}$$

Model niesymetryczny

$$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks} = k\pi/a_s, & p = 1, 3 \\ \delta_{ks} = (2k-1)\pi/2a_s, & p = 2, 4 \end{cases}$$

$$T_{kps} = \begin{cases} \cos(\kappa_{kps} x_s), & p = 1, 2 \\ \sin(\kappa_{kps} x_s), & p = 3, 4 \end{cases}$$

$$B_{kpsv} = \begin{cases} \cosh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 1 \\ \frac{x_s}{a_s} \sinh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 2 \\ \sinh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 3 \\ \frac{x_s}{a_s} \cosh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 4 \end{cases}$$

Całka ogólna

Uwaga

Ponieważ w modelu matematycznym stosuje się tylko funkcje ciągłe, n -krotnie różniczkowalne, to dowolne obciążenie zewnętrzne $q(x_1, x_2)$ (ciągłe, dyskretne, skupione), aproksymujemy ciągłą funkcją obciążenia $Q(x_1, x_2)$.

Całka szczegółna

Weźmy funkcję obciążenia w postaci wielomianu tensorowego:

$$Q(x_1, x_2) = A_0 \Psi(x_1, x_2) + A_{mps} T_{mps}(x_s) + B_{mnpq} T_{mnpq}(x_1, x_2) \quad (5)$$

gdzie:

- $\Psi(x_1, x_2)$ – wielomian algebraiczny czwartego stopnia
- $T_{mps}(x_s)$ – pojedyncze funkcje trygonometryczne
- $T_{mnpq}(x_1, x_2)$ – podwójne funkcje trygonometryczne
- $m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N, p = 1, \dots, 4, q = 1, \dots, 4, s = 1, 2$

Całka szczególna

Wprowadzone funkcje mają postać:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{24a_1^4} + \frac{x_1^2 x_2^2}{4a_1^2 a_2^2} + \frac{x_2^4}{24a_2^4} \quad (6)$$

$$T_{mnpq}(x_1, x_2) = T_{mp1}(x_1) \cdot T_{nq2}(x_2) \quad (7)$$

Nieznane współczynniki A_0 , A_{mps} , B_{mnpq} określamy z warunków spełnianych w oddzielnych punktach (x_1^*, x_2^*) na powierzchni:

$$Q(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} = q(x_1^*, x_2^*) \quad (8)$$

Podobnie do (5) weźmy całkę szczególną r-nia (1):

$$w_*(x_1, x_2) = A_0^* \Psi(x_1, x_2) + A_{mps}^* T_{mps}(x_s) + B_{mnpq}^* T_{mnpq}(x_1, x_2) \quad (9)$$

Ugięcie płyty

Wyrażenie na ugięcie płyty:

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2) \quad (10)$$

gdzie:

- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu
- $W_*(x_1, x_2)$ – funkcje obciążenia ugięcia płyty
- R_{kpsv} – stopnie swobody płyty podstawowej

Ugięcie płyty

Uwaga

Całka szczególna jest ściśle określona, więc płyta podstawowa jest zrównoważona obciążeniem zewnętrznym $Q(x_1, x_2)$.

Całka ogólna zawiera stopnie swobody płyty R_{kpsv} , należy więc jeszcze nałożyć na brzeg płyty więzy w postaci warunków brzegowych.

Węzły brzegowe

Definicja

Makroelement płytowy K -tego rzędu to makroelement uzupełniony węzłami brzegowymi w K -tej aproksymacji.

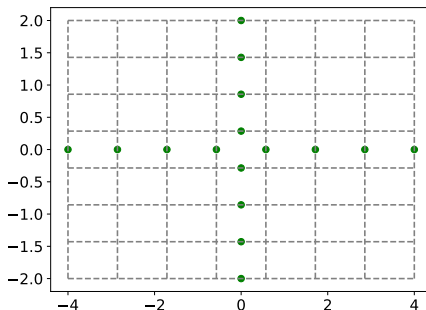
Przy zadanej z góry liczbie K aproksymacji rozwiązania problemu, ogólna liczba stopni swobody płyty wynosi:

$$n = K \cdot p_{\max} \cdot s_{\max} \cdot v_{\max} = K \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \quad (11)$$

Na brzegu płyty należy więc nałożyć $n = 32K$ więzów. Ponieważ w każdym węźle zapisujemy dwa warunki brzegowe, to liczba węzłów brzegowych musi być równa $i = n/2$. Węzły brzegowe rozmieszczamy na brzegu płyty rzeczywistej.

Węzły brzegowe

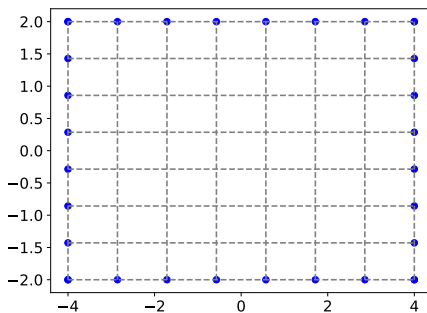
Wybór punktów wyjściowych



Rysunek: Punkty wyjściowe dla $K = 2$

Węzły brzegowe

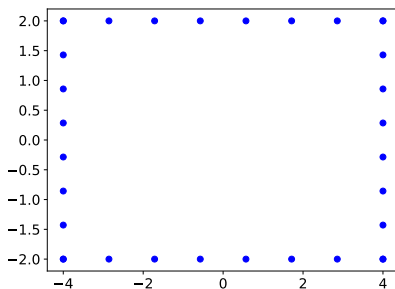
Generowanie węzłów brzegowych poprzez rzutowanie punktów wyjściowych na krawędzie



Rysunek: Rzutowanie punktów wyjściowych na krawędzie płyty

Węzły brzegowe

Rozkład węzłów brzegowych dla płyty prostokątnej:



Rysunek: Węzły brzegowe

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 a_1 = 4.0
5 a_2 = 2.0
6
7 K = 2
8 i = 16 * K
9 num = np.int64(i / 4)
10
11 p = np.linspace(-a_1, a_1, num)
12 q = np.linspace(-a_2, a_2, num)
13 r = np.full(num, a_1)
14 s = np.full(num, a_2)
15
16 plt.scatter(p, s, c="blue")
17 plt.scatter(r, q, c="blue")
18 plt.scatter(p, -s, c="blue")
19 plt.scatter(-r, q, c="blue")
20 plt.show()

```

Węzły powierzchniowe

Uwaga

Całka szczególna została wyrażona przez funkcję obciążenia $Q(x_1, x_2)$, która nie jest jeszcze określona, bo nie znamy liczby węzłów powierzchniowych (x_1^*, x_2^*) i ich rozmieszczenia.

Węzły powierzchniowe

Liczba węzłów powierzchniowych musi być równa liczbie nieznanymi parametrów wchodzących do wyrażenia całki szczególnej (9):

$$j = 1 + 4 \cdot M + 4 \cdot N + 16 \cdot M \cdot N \quad (12)$$

Dla

$$M = N = 1; \quad j = 1 + 4 + 4 + 16 = 25$$

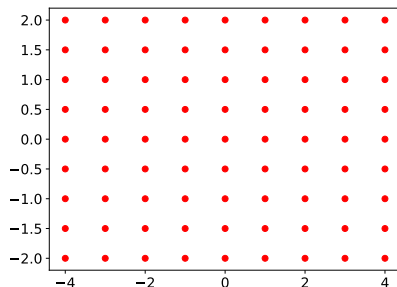
$$M = N = 2; \quad j = 1 + 8 + 8 + 64 = 81$$

itd.

Węzły powierzchniowe rozmieszczamy na powierzchni płyty rzeczywistej.

Węzły powierzchniowe

Dla płyty prostokątnej przyjmujemy równomierny rozkład węzłów powierzchniowych.



Rysunek: Węzły powierzchniowe

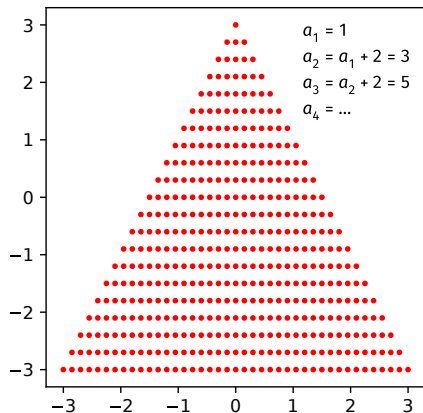
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 a_1 = 4.0
5 a_2 = 2.0
6
7 M = N = 2
8
9 j = 16 * M * N + 4 * M + 4 * N + 1
10 num = np.int64(np.sqrt(j))
11
12 p = np.linspace(-a_1, a_1, num)
13 q = np.linspace(-a_2, a_2, num)
14 P, Q = np.meshgrid(p, q)
15
16 plt.scatter(P, Q, c="red")
17 plt.show()

```


Węzły powierzchniowe

Dla płyty trójkątnej przyjmujemy rozkład węzłów powierzchniowych jako ciąg arytmetyczny o różnicy 2.



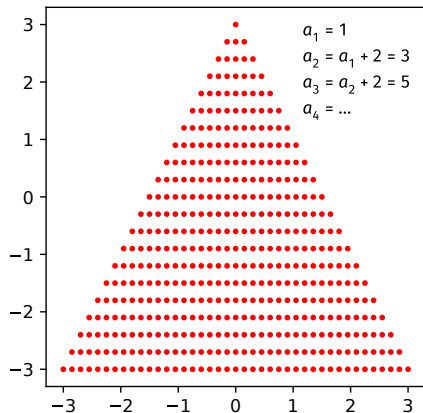
Rysunek: Płyta trójkątna

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import ezdxf
4
5 doc = ezdxf.readfile("triangle.dxf")
6 msp = doc.modelspace()
7
8 pts = msp.query('POINT[layer=="0"]')
9
10 x = [p.dxf.location.x for p in pts]
11 y = [p.dxf.location.y for p in pts]
12
13 plt.scatter(x, y, s=5, c='red')
14 plt.axis('scaled')
15 plt.show()

```

Węzły powierzchniowe



Rysunek: Płyta trójkątna

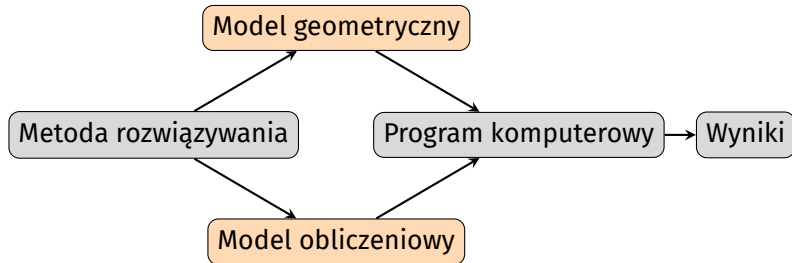
Ogólny wzór ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad r = 2$$

Suma skończonego ciągu:

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \\
 &= \frac{a_1 + a_n}{2} n = \\
 &= \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} n
 \end{aligned}$$

Metoda rozwiązywania



Model geometryczny

Model geometryczny to konfiguracja węzłów stacjonarnych, brzegowych i powierzchniowych wybrana tak, aby jak najdokładniej odzwierciedlała rzeczywistą konstrukcję, tj. kształt płyty, warunki brzegowe, przyłożone do płyty obciążenia i deformację płyty wywołaną ich wpływem.

Model obliczeniowy

Model obliczeniowy opiera się na ścisłym rozwiązaniu równania równowagi.

Zawiera:

- funkcje stanu wielkości statycznych i kinematycznych
- makroelement płytowy o wymiarach $2a_1 \times 2a_2$
- stałe sprężyste materiału płyty
- parametry obciążenia płyty

Obejmuje:

- sposób generowania węzłów
- definiowanie warunków brzegowych i powierzchniowych
- budowę i rozwiązanie układu równań algebraicznych
- obliczanie wartości poszukiwanych wielkości

Metoda analityczno-numeryczna

Metoda rozwiązywania została zaimplementowana w autorskim programie komputerowym, który automatyzuje proces tworzenia modelu geometrycznego i obliczeniowego, rozwiązuje zagadnienie i zwraca rezultaty w postaci wykresów przestrzennych, konturowych i przekrojowych.

Metoda opiera się na modelu continuum materialnego, co automatycznie zapewnia ciągłość przemieszczeń i naprężeń w całym obszarze płyty. Nie ma potrzeby dyskretyzacji konstrukcji na oddzielne elementy skończone oraz ich agregacji w całość, wobec czego liczba operacji obliczeniowych jest mniejsza niż w metodach numerycznych.

Metoda analityczno-numeryczna

Istota metody polega na:

- Określeniu konfiguracji płyty włączonej w obszar makroelementu przez współrzędne jej wierzchołków i wprowadzeniu do modelu obliczeniowego
- Określeniu całki szczególnej niejednorodnego równania równowagi tak, żeby reakcje wewnętrzne płyty w każdym węźle powierzchniowym równoważyły obciążenie przyłożone w tym węźle
- Zbudowaniu układu równań brzegowych tak, żeby w każdym węźle na brzegu płyty funkcje stanu spełniały warunki brzegowe

Metoda analityczno-numeryczna

- Opiera się na dokładnym rozwiązaniu równania równowagi, którego rozwiązanie jest następnie podstawiane do zdefiniowanych uprzednio funkcji stanu
- Pozwala niezależnie spełnić statyczne, kinematyczne i mieszane warunki brzegowe w oddzielnych węzłach brzegowych, których liczba zawsze odpowiada liczbie stopni swobody płyty
- Wyróżnia się możliwością określenia obciążenia jako funkcji dwóch zmiennych, prostym podejściem do rozwiązania konstrukcji, większą dokładnością i efektywnością rozwiązania w porównaniu z metodami numerycznymi, a także bezsiatkowym podejściem do rozwiązania problemu

Funkcje stanu

Ogólne wyrażenie na ugięcie płyty ma postać

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2) \quad (13)$$

Wyrażenie to nazywamy *funkcją stanu* ugięcia.

Zaznaczmy, że wyrażenie (13) zadane jest w obszarze płyty podstawowej i poprawnie określone dla płyty rzeczywistej dowolnej konfiguracji włączanej w makroelement.

Funkcje stanu

W celu zdefiniowania warunków brzegowych zastosowano następujący słownik warunków brzegowych na funkcje stanu wprowadzone w modelu:

$$\begin{array}{llllll} w \rightarrow W, & \varphi_1 \rightarrow U, & \varphi_2 \rightarrow V, & M_{11} \rightarrow X, & M_{22} \rightarrow Y, & \\ M_{12} \rightarrow Z, & Q_1 \rightarrow G, & Q_2 \rightarrow H, & V_1 \rightarrow K, & V_2 \rightarrow L. & \end{array} \quad (14)$$

Funkcje stanu

Niech F oznacza jedną z funkcji

$$F = (U, V, X, Y, Z, G, H, K, L) \quad (15)$$

Dowolną funkcję stanu możemy podać w postaci

$$F(x_1, x_2) = R_{kpsv} F_{kpsv}(x_1, x_2) + F_*(x_1, x_2) \quad (16)$$

Otrzymujemy ją z wyrażenia $W(x_1, x_2)$ przy pomocy różniczkowania automatycznego.

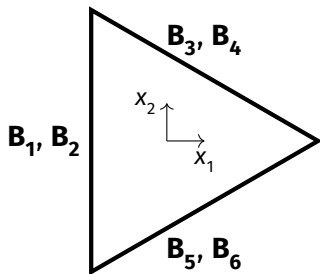
Funkcje stanu określają warunki równowagi sił wewnętrznych i więzów nałożonych na brzeg płyty.

Funkcje stanu

W każdym punkcie krawędzi spełniamy dwa warunki brzegowe, które zapisujemy w postaci macierzowej w formie bloków \mathbf{B}_i wartości funkcji stanu w węzłach brzegowych.

Układ równań

Bloki te są składane w pionie (według wierszy) tworząc macierz rozszerzoną układu równań liniowych $\mathbf{M} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$.



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \\ \mathbf{B}_6 \end{bmatrix}$$

Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się z układu $\mathbf{AR} = -\mathbf{b}$.

Wybór języka programowania

Model obliczeniowy zaimplementowano w wieloparadygmatowym języku programowania *Python*.

Moduł	Paradygmat	Założenia
geometryczny	obiektowy	hermetyzacja; polimorfizm; dziedziczenie
obliczeniowy	funkcyjny	domknięcia; funkcje wyższego rzędu; funkcje pierwszoklasowe

Do obliczeń wykorzystano pakiety *NumPy* i *Autograd*.
Wykresy opracowano przy pomocy biblioteki *Matplotlib*.

Funkcje jako domknięcia

```
1 def T(k, p, s):
2     def fn(x_1, x_2):
3         match p:
4             case 1 | 2:
5                 return cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
6             case 3 | 4:
7                 return sin(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
8     return fn
9
10
11 def B(k, p, s, ni):
12     def fn(x_1, x_2):
13         match ni:
14             case 1:
15                 return cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
16             case 2:
17                 return (x(s)(x_1, x_2)/a(s)) * (sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2)))
18             case 3:
19                 return sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
20             case 4:
21                 return (x(s)(x_1, x_2)/a(s)) * (cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2)))
22     return fn
```

Funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe

```
1 def W(k, p, s, ni):
2     def fn(x_1, x_2):
3         return B(k, p, s, ni)(x_1, x_2) * T(k, p, 3 - s)(x_1, x_2)
4     return fn
5
6
7 def shape_functions(K):
8     result = []
9     for k in range(1, K + 1):
10        for p in range(1, 5):
11            for s in range(1, 3):
12                for ni in range(1, 5):
13                    result.append(W(k, p, s, ni))
14    return result

1 W_g = shape_functions(K)
2 W_p = force_functions(M, N)
3
4 W = final(W_g, W_p)
```


Automatyczne różniczkowanie

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

$$M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)$$

$$M_{12} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

```

1 def M_11(w):
2     def fn(x_1, x_2):
3         return -D * (
4             grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
5             + nu * grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
6         )
7     return fn
8
9 def M_22(w):
10    def fn(x_1, x_2):
11        return -D * (
12            grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
13            + nu * grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
14        )
15    return fn
16
17 def M_12(w):
18    def fn(x_1, x_2):
19        return (
20            -D
21            * (1 - nu)
22            * grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)
23        )
24    return fn

```

Rozwiązanie liniowego układu równań

```
1 def Block(fs, pts):
2     x = pts[:,0]
3     y = pts[:,1]
4     m = x.size
5     n = len(fs)
6     block = np.zeros((m, n))
7     for i in range(n):
8         block[:,i] = fs[i](x, y)
9     return block

1 # Augmented matrix
2 M = np.vstack(blocks)
3
4 # Coefficient matrix
5 A = M[:, :-1]
6
7 # Column vector of constant terms
8 b = M[:, -1]
9
10 # Solve a linear matrix equation
11 R = np.linalg.solve(A, -b)
```

Implementacja modelu

Wartość poszukiwanej wielkości w punkcie (x_1, x_2) wynosi

$$F(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) R_1 + f_2(x_1, x_2) R_2 + \dots + f_m(x_1, x_2) R_m \quad (17)$$

Wyrażenie to zapisujemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i \quad (18)$$

gdzie $\mathbf{A}_i = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)]$

Funkcje $f_i(x_1, x_2)$, $i = 1, \dots, m$ mogą przyjmować argumenty w postaci macierzy $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ o wymiarach $j \times k$:

$$\mathbf{F}_{jk} = \mathbf{A}_{ijk} \mathbf{R}_i \quad (19)$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

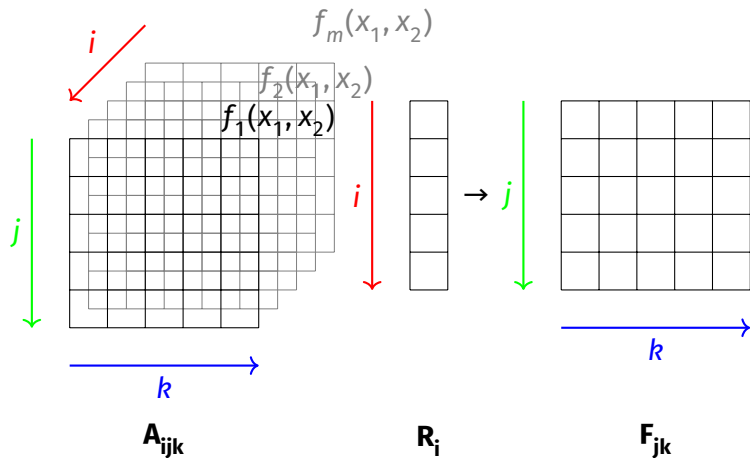
Stosujemy tu konwencję sumacyjną Einsteina

$$F = \text{np.einsum}('ijk, i \rightarrow jk', A, R)$$

Pierwszy argument tej funkcji określa łańcuch indeksów, jako rozdzieloną przecinkami listę etykiet indeksów dolnych, gdzie każda etykieta odnosi się do wymiaru odpowiedniego operandu (czyli kolejnych argumentów tej funkcji).

Ilekoć etykieta powtarza się, dokonujemy sumowania. W trybie jawnym, który jest tu stosowany, można określić wyjściowe etykiety z indeksem dolnym przy pomocy identyfikatora \rightarrow .

Konwencja sumacyjna Einsteina



Rysunek: Zasada działania funkcji einsum

Przykłady

Efektywność opracowanej metody zilustrowano na licznych przykładach płyt o różnych konfiguracjach i warunkach brzegowych, jednorodnych pod względem właściwości materiałowych.

Płyty dzielimy na trzy grupy:

- 1 jednokierunkowo symetryczne
- 2 dwukierunkowo symetryczne
- 3 niesymetryczne

Przykłady

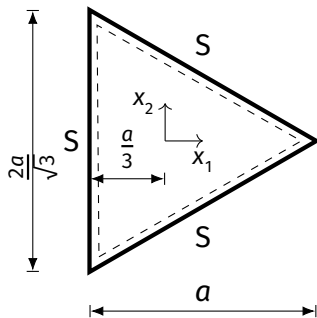
Krawędzie płyty ponumerowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara oznaczmy symbolami:

- S – krawędź swobodnie podparta (simply supported)
- C – krawędź zamocowana (clamped)
- F – krawędź swobodna (free)

Odpowiadające im warunki brzegowe:

- S – w, M
- C – w, φ
- F – M, V

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



Rysunek: Schemat płyty trójkątnej

Parametry geometryczne:

$$a = 6 \text{ m}, \quad h = 0.2 \text{ m}$$

Stałe sprężyste:

$$E = 30 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \nu = 0.2$$

Obciążenie równomierne:

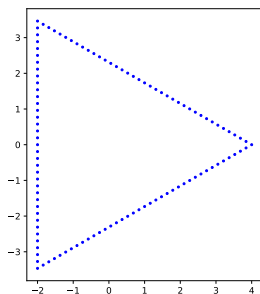
$$q = 10 \text{ kPa}$$

Podsumowanie

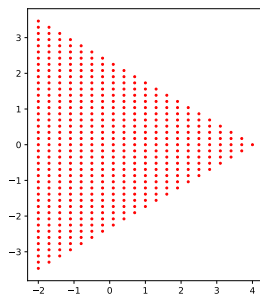
Tabela: Liczba węzłów płyty trójkątnej

Węzły	Aproksymacja	Liczba
brzegowe	$K = 7$	112
powierzchniowe	$M = N = 5$	441
RAZEM		553

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego

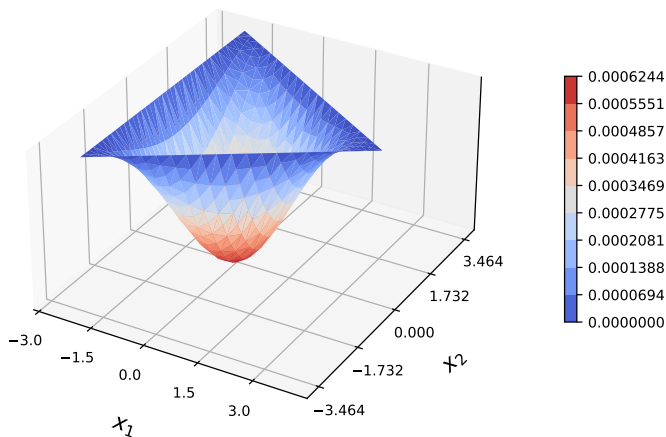


Rysunek: Węzły brzegowe



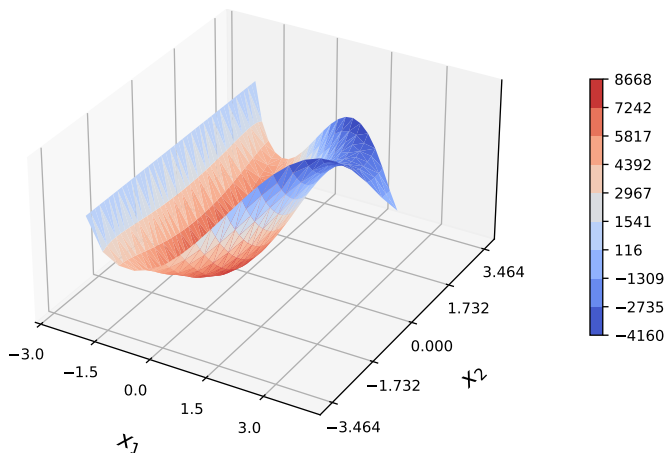
Rysunek: Węzły powierzchniowe

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



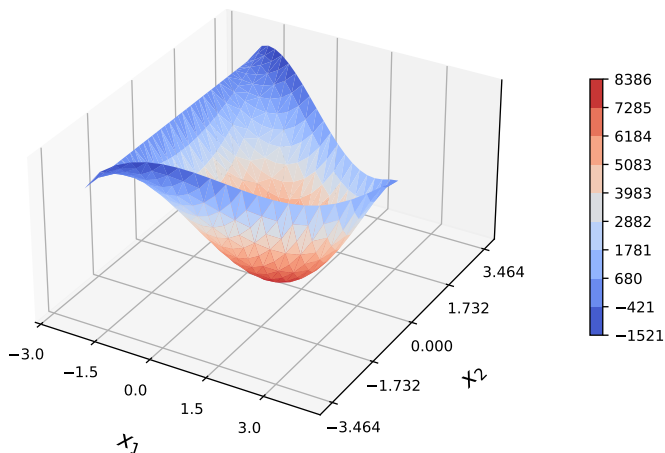
Rysunek: Przestrzenny wykres ugięcia płyty trójkątnej równobocznej swobodnie podpartej na konturze

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



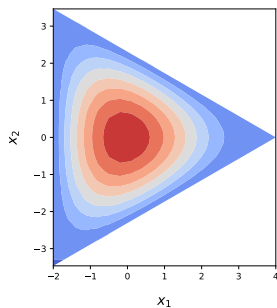
Rysunek: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{11} płyty trójkątnej równobocznego swobodnie podpartej na konturze

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego

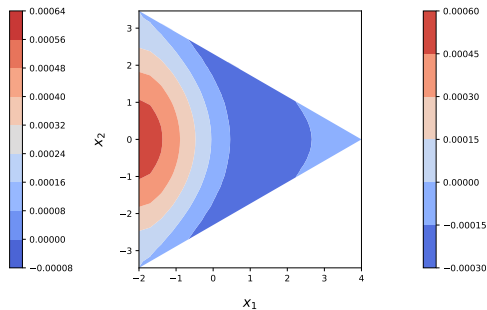


Rysunek: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{22} płyty trójkątnej równobocznego swobodnie podpartej na konturze

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



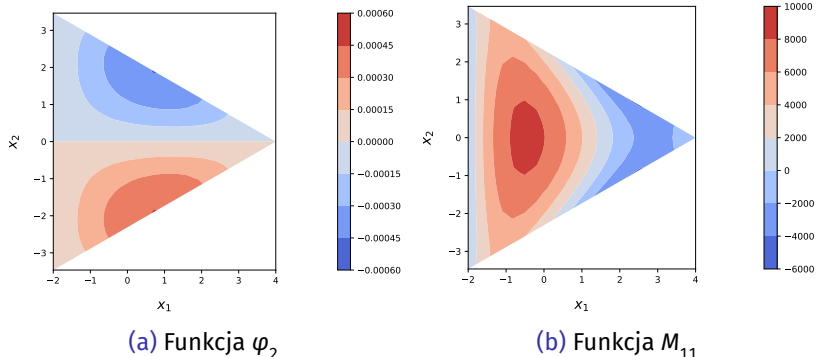
(a) Funkcja w



(b) Funkcja φ_1

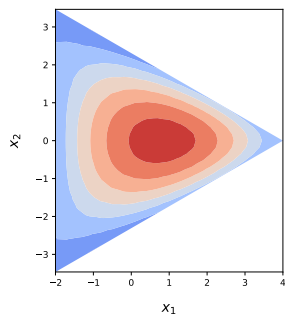
Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej równobocznej

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego

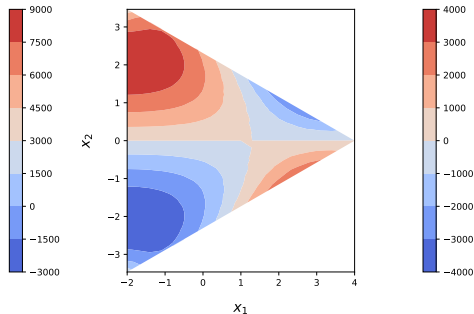


Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej równobocznej

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



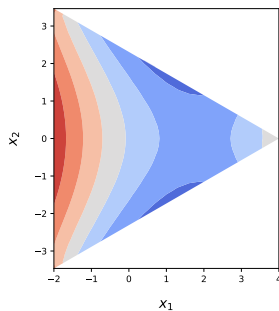
(a) Funkcja M_{22}



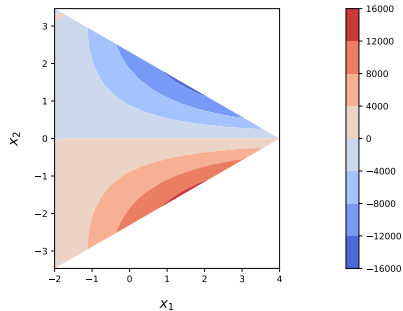
(b) Funkcja M_{12}

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej równobocznej

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



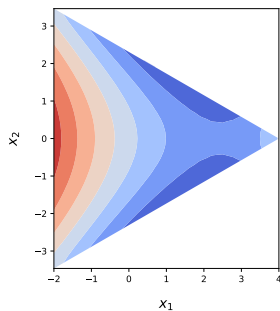
(a) Funkcja Q_1



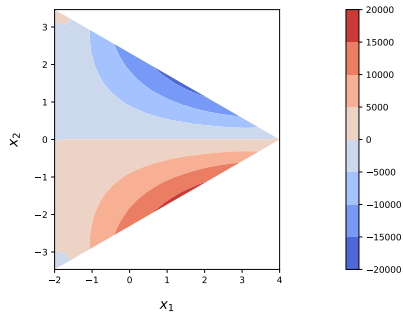
(b) Funkcja Q_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej równobocznej

Płyta SSS w kształcie trójkąta równobocznego



(a) Funkcja V_1



(b) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej równobocznej

Rozwiązanie Timoszenki

Rozwiązanie zawarte w monografii „Teoria płyt i powłok”
S. Timoszenko i S. Woinowsky-Krieger.

Równanie powierzchni odkształconej płyty trójkątnej
równobocznej równomiernie obciążonej:

$$w = \frac{q}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right) \quad (20)$$

Momenty zginające w środku płyty:

$$M_x = M_y = (1 + \nu) \frac{qa^2}{54} \quad (21)$$

Porównanie wyników

Tabela: Wartości ugięcia i momentów zginających w środku płyty trójkątnej równobocznej o zadanych parametrach

F-cja	Jedn.	Timoszenko	Makroelement	RE
w	m	0.0064	0.0063	1.59 %
M_x	N m/m	8000.00	8089.72	1.11 %
M_y	N m/m	8000.00	7658.89	4.45 %

Originalne elementy pracy

- 1 Model matematyczny i obliczeniowy konstrukcji płytowej
- 2 Nowa, analityczno-numeryczna metoda rozwiązywania cienkich, wielokątnych płyt izotropowych
- 3 Autorski program komputerowy do rozwiązywania konstrukcji płytowych
- 4 Zastosowanie automatycznego różniczkowania
- 5 Sposób tworzenia węzłów brzegowych i powierzchniowych
- 6 Przykłady rozwiązań i analiza wyników numerycznych

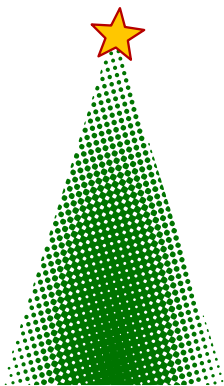
Zalety metody

- 1 Łatwość modelowania i rozwiązywania konstrukcji płytowych
- 2 Bezsiatkowe podejście do rozwiązania problemu
- 3 Możliwość spełnienia statycznych, kinematycznych i mieszanych warunków brzegowych
- 4 Wysoka efektywność obliczeń i dokładność rozwiązania
- 5 Znacznie mniejsza liczba operacji komputerowych i obliczeniowych dla modelowania konstrukcji płytowych, niż w metodach numerycznych
- 6 Możliwość określenia obciążenia jako funkcji dwóch zmiennych

Wady metody

- 1 Wymaga ulepszenia dla rozwiązywania płyt ograniczonych wieloma konturami
- 2 Jak każda metoda daje dobre wyniki dla płyt regularnych. Rozwiązania płyt nieregularnych otrzymuje się z mniejszą dokładnością

Dziękuję za uwagę



Wesołych Świąt
Szczęśliwego Nowego Roku