# Modelowanie cienkich, izotropowych, wielokątnych płyt metodą makroelementów

## Modeling of thin isotropic polygonal plates using macroelement method

Justyna Sobczak-Piąstka[1] Krystian Rosiński[2]
Mykhaylo Delyavskyy[3] Nina Zdolbitska[3]

[1]Politechnika Bydgoska
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

[2]PUH LEM-BUD Sp. z o.o.

[3]Lutsk National Technical University

# Plan prezentacji

# Cel

- Rozwój uniwersalnej i łatwej w użyciu analityczno-numerycznej metody modelowania i rozwiązywania zagadnienia zginania płyt o dowolnym[1] kształcie
- Opracowanie sposobu automatycznego rozmieszczenia określonej liczby węzłów brzegowych i powierzchniowych
- Analiza wpływu rozmieszczenia węzłów[2] na dokładność wyników

[1]Dowolny kontur można aproksymować linią łamaną zamkniętą
[2]Rozkład równomierny i chmura losowych punków

# Publikacje dot. metody makroelementów

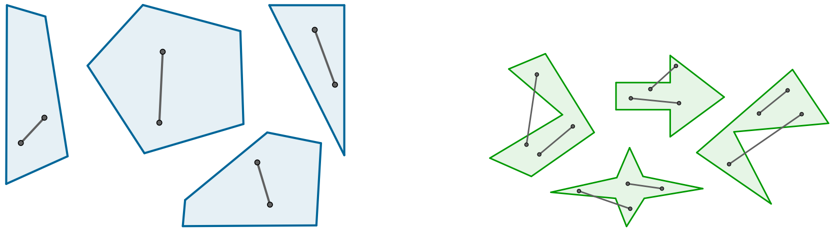
[1] Mykhaylo Delyavskyy, Justyna Sobczak-Piąstka, Krystian Rosinski, Dariusz Buchaniec i Yuriy Famulyak. „Solution of thin rectangular plates with various boundary conditions". W: *AIP Conference Proceedings* 2949.1 (sierp. 2023), s. 020023. ISSN: 0094-243X. DOI: 10.1063/5.0165300. URL: https://doi.org/10.1063/5.0165300.

[2] Krystian Rosiński. „Modelowanie cienkościennych układów płytowych w ujęciu makroelementowym". Rozprawa doktorska. Politechnika Bydgoska, 2021. URL: https://dlibra.pbs.edu.pl/dlibra/publication/3860/edition/3794.

[3] Mykhaylo Delyavskyy i Krystian Rosiński. „The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates". W: *Applied Sciences* 10.17 (2020). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10175931. URL: https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5931.

# Założenia i przeznaczenie metody

- Płyty cienkie, izotropowe
- Klasyczna teoria płyt (Kirchhoffa)
- Płyty wielokątne (o kształtach wypukłych)



(a) Wypukłe (b) Wklęsłe

Rysunek: Przykłady wielokątów

## Twierdzenie

Wielokąt jest **wklęsły**, jeżeli co najmniej jeden z jego kątów ma miarę większą od 180°. Wielokąt, który nie jest wklęsły, to wielokąt **wypukły**.

## Definicja

Jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty w wielokącie jest całkowicie w nim zawarty, to taki wielokąt nazywamy **wypukłym**.

# Rozwiązanie równania podstawowego

Stan równowagi cienkiej płyty izotropowej opisuje równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q}{D} \tag{1}$$

gdzie:

- $w(x_1, x_2)$ – funkcja ugięcia płyty
- $q(x_1, x_2)$ – rozkład obciążenia na powierzchni górnej płyty
- $D$ – sztywność płyty na zginanie

# Rozwiązanie równania podstawowego

Weźmy wyrażenie na ugięcie płyty w postaci:

$$w = w_o + w_* \tag{2}$$

gdzie:

- $w_o$ – całka ogólna równania jednorodnego $\nabla^2\nabla^2 w = 0$
- $w_*$ – całka szczególna równania niejednorodnego (1)

**Uwaga**

Rozwiązania $w_o$ i $w_*$ są niezależne, co pozwala z zadaną dokładnością spełnić warunki brzegowe i powierzchniowe.

# Całka ogólna

Całka ogólna ma postać:

$$w_o(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot W_{kpsv}(x_1, x_2) \tag{3}$$

gdzie:

- $R_{kpsv}$ – dowolne współczynniki (stopnie swobody płyty)
- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu ugięcia płyty
- $k = 1, \dots, K, \quad p = 1, \dots, 4, \quad s = 1, 2, \quad v = 1, \dots, 4$

# Całka ogólna

Funkcje kształtu ugięcia płyty mają postać:

$$W_{kpsv}(x_1, x_2) = B_{kpsv}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}(x_{3-s}) \tag{4}$$

gdzie:

- $B_{kpsv}(x_s)$ – funkcje bazowe modelu
- $T_{kps}(x_s)$ – funkcje trygonometryczne

# Całka ogólna

$$B_{kpsv} = \begin{cases} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 1 \\ \frac{x_s}{a_s} \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 2 \\ \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 3 \\ \frac{x_s}{a_s} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 4 \end{cases}$$

$$T_{kps} = \begin{cases} \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right), & p = 1, 2 \\ \sin\left(\kappa_{kps}\, x_s\right), & p = 3, 4 \end{cases} \tag{5}$$

$$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks} = k\pi / a_s, & p = 1, 3 \\ \delta_{ks} = (2k - 1)\pi / 2a_s, & p = 2, 4 \end{cases}$$

# Całka szczególna

Ponieważ w modelu matematycznym stosuje się tylko funkcje ciągłe, $n$-krotnie różniczkowalne, to dowolne obciążenie zewnętrzne $q(x_1, x_2)$ (ciągłe, dyskretne, skupione), aproksymujemy ciągłą funkcją obciążenia w postaci wielomianu tensorowego:

$$Q(x_1, x_2) = A_0 + A_{mps} \cdot T_{mps}(x_s) + B_{mnpq} \cdot T_{mnpq}(x_1, x_2) \tag{6}$$

gdzie:

- $T_{mps}(x_s)$ – pojedyncze funkcje trygonometryczne
- $T_{mnpq}(x_1, x_2) = T_{mp1}(x_1) \cdot T_{nq2}(x_2)$ – podwójne funkcje trygonometryczne
- $m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N, \quad p = 1, \dots, 4, \quad q = 1, \dots, 4, \quad s = 1, 2$

# Całka szczególna

Nieznane współczynniki $A_0, A_{mps}, B_{mnpq}$ określamy z warunków spełnianych w oddzielnych punktach $(x_1^*, x_2^*)$ na powierzchni:

$$Q(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}} = q(x_1^*, x_2^*) \tag{7}$$

Podobnie do (6) weźmy całkę szczególną r-nia (1):

$$w_*(x_1, x_2) = A_0^* \cdot \Psi(x_1, x_2) + A_{mps}^* \cdot T_{mps}(x_s) + B_{mnpq}^* \cdot T_{mnpq}(x_1, x_2), \tag{8}$$

gdzie $\Psi(x_1, x_2)$ to wielomian algebraiczny czwartego stopnia:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{24a_1^4} + \frac{x_1^2 x_2^2}{4a_1^2 a_2^2} + \frac{x_2^4}{24a_2^4} \tag{9}$$

# Ugięcie płyty

Wyrażenie na ugięcie płyty:

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2) \tag{10}$$

gdzie:

- $R_{kpsv}$ – stopnie swobody płyty
- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu ugięcia płyty
- $W_*(x_1, x_2)$ – funkcje obciążenia ugięcia płyty

# Funkcje stanu

Niech $F$ oznacza jedną z funkcji

$$F = (w,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_n,\ M_{11},\ M_{22},\ M_n,\ M_{12},\ Q_1,\ Q_2,\ V_1,\ V_2). \tag{11}$$

Dowolną funkcję stanu możemy podać w postaci

$$F(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot F_{kpsv}(x_1, x_2) + F_*(x_1, x_2) \tag{12}$$

Otrzymujemy ją z wyrażenia $w(x_1, x_2)$ przy pomocy różniczkowania automatycznego.

# Warunki brzegowe i powierzchniowe

| **Całka** | **ogólna** | **szczególna** |
|---|---|---|
| Węzły | brzegowe | powierzchniowe |
| Warunki | równowaga reakcji zewnętrznych w węzłach na brzegu płyty | równowaga reakcji wewnętrznych i obciążenia przyłożonego w węzłach na powierzchni płyty |

# Warunki brzegowe i powierzchniowe

Wyrażenie $F(x_1, x_2)$ zawiera dwa zbiory dowolnych współczynników, które pozwalają na spełnienie warunków brzegowych i powierzchniowych z zadaną dokładnością.

Ponieważ wyrażenie $Q(x_1, x_2)$ jest dokładnym rozwiązaniem równania równowagi (1), siły wewnętrzne i przemieszczenia wewnątrz płyty są zrównoważone obciążeniem zewnętrznym. Warunki te spełniamy na powierzchni płyty w punktach zwanych *węzłami powierzchniowymi*. Stąd określamy całkę szczególną równania (1).

# Warunki brzegowe i powierzchniowe

Ale wielkości na krawędziach są niezrównoważone, ponieważ wyrażenie całki ogólnej zawiera stopnie swobody płyty $R_{kpsv}$. W celu ustabilizowania płyty nakładamy pewne ograniczenia w postaci warunków brzegowych w oddzielnych punktach na konturze płyty. Punkty te nazywamy *węzłami brzegowymi*. Każdemu warunkowi brzegowemu odpowiada jeden parametr $R_{kpsv}$.

# Rozwiązanie

Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się z algebraicznego układu równań typu $\mathbf{AR} = -\mathbf{b}$ względem nieznanych współczynników $R_{kpsv}$. Rozwiązując układu równań eliminujemy stopnie swobody płyty. Następnie obliczamy wymagane statyczne i kinematyczne wielkości i drukujemy wyniki, zwykle w formie wykresów (2D lub 3D).

Model obliczeniowy zaimplementowano w języku programowania Python. Kod źródłowy programu dostępny jest w repozytorium:

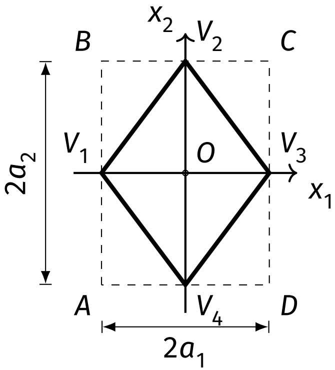
`https://github.com/krysros/mcr_2024`

# Model geometryczny

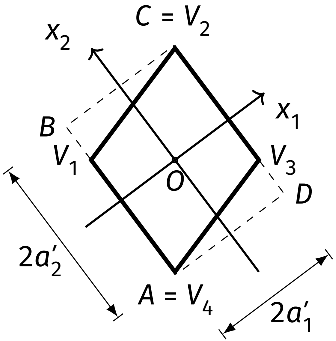
Geometrię płyty określają współrzędne kolejnych wierzchołków $V_i$ wielokąta odpowiadającego konturowi płyty.

*Model geometryczny* to konfiguracja węzłów stacjonarnych, brzegowych i powierzchniowych wybrana tak, aby jak najdokładniej odzwierciedlała rzeczywistą konstrukcję, tj. kształt płyty, warunki brzegowe, przyłożone do płyty obciążenia i deformację płyty wywołaną ich wpływem.

# Model geometryczny




(a)




(b)

Rysunek: Prostokąt ograniczający płytę: (a) koperta i (b) prostokąt minimalny

# Węzły brzegowe

Przy zadanej z góry liczbie $K$ aproksymacji rozwiązania problemu, ogólna liczba stopni swobody płyty wynosi:

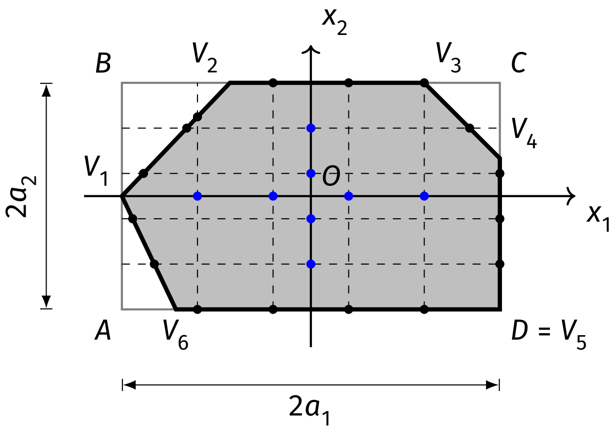
$$n = K \cdot p_{\text{max}} \cdot s_{\text{max}} \cdot v_{\text{max}} = K \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \tag{13}$$

Na brzegu płyty należy więc nałożyć $n = 32\,K$ więzów.

Ponieważ w każdym węźle zapisujemy dwa warunki brzegowe, to liczba węzłów brzegowych musi być równa $i = n/2$.

Węzły brzegowe rozmieszczamy na brzegu płyty rzeczywistej.

# Węzły brzegowe



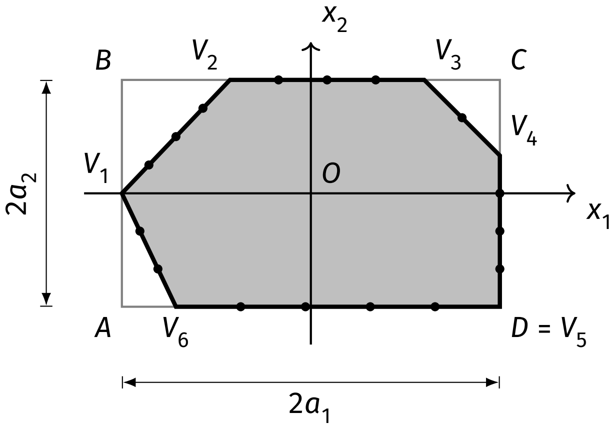

Rysunek: Określenie liczby węzłów brzegowych (rzutowanie punktów wyjściowych)

# Węzły brzegowe

Tabela: Liczba węzłów brzegowych na krawędziach płyty

| Nr | Krawędź | Liczba węzłów |
|---|---|---|
| 1 | $V_1$–$V_2$ | 3 |
| 2 | $V_2$–$V_3$ | 3 |
| 3 | $V_3$–$V_4$ | 1 |
| 4 | $V_4$–$V_5$ | 3 |
| 5 | $V_5$–$V_6$ | 4 |
| 6 | $V_6$–$V_1$ | 2 |

# Węzły brzegowe




Rysunek: Równomierny rozkład określonej liczby węzłów na krawędziach

# Węzły powierzchniowe

Liczba węzłów powierzchniowych musi być równa liczbie nieznanych parametrów wchodzących do wyrażenia całki szczególnej (8):

$$j = 1 + 4 \cdot M + 4 \cdot N + 16 \cdot M \cdot N \tag{14}$$

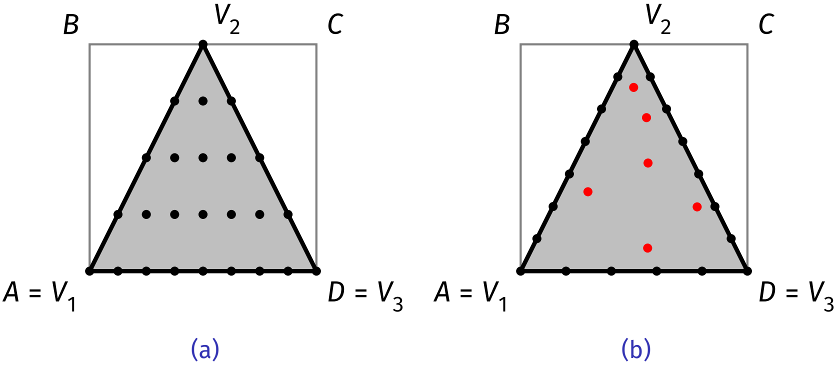
Dla

$$M = N = 1; \quad j = 1 + 4 + 4 + 16 \quad = 25$$
$$M = N = 2; \quad j = 1 + 8 + 8 + 64 \quad = 81$$

itd.

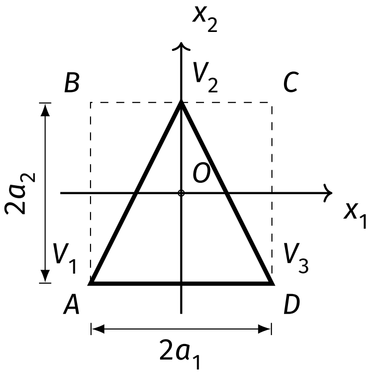
Węzły powierzchniowe rozmieszczamy na powierzchni płyty rzeczywistej.

# Węzły powierzchniowe

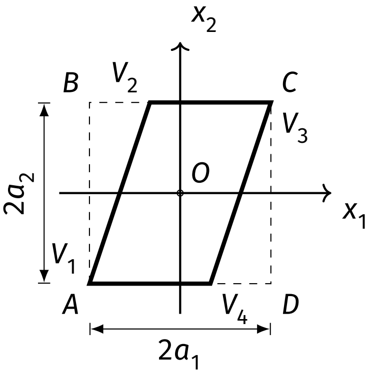



Rysunek: Równomierny (a) i losowy (b) rozkład węzłów powierzchniowych płyty trójkątnej dla $K = 1$ i $M = N = 1$

# Przykłady



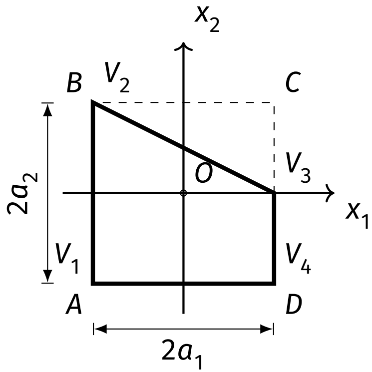

(a)



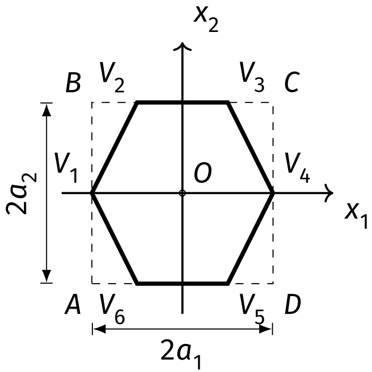

(b)

Rysunek: Przykłady makroelementów: (a) płyta trójkątna, (b) płyta równoległoboczna

# Przykłady




(a)




(b)

Rysunek: Przykłady makroelementów: (a) płyta trapezowa, (b) płyta sześciokątna

# Przykłady

Parametry geometryczne:

$$a_1 = 3\,\mathrm{m}, \quad a_2 = 3\,\mathrm{m}, \quad h = 0.2\,\mathrm{m}$$

Stałe sprężyste:

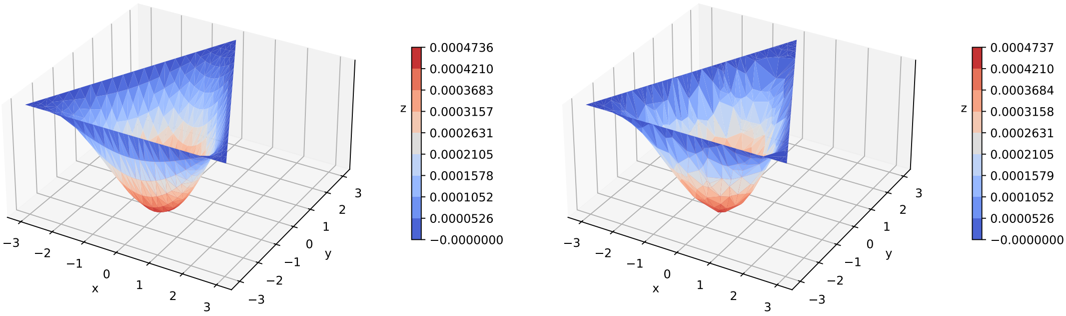
$$E = 30 \times 10^9\,\mathrm{Pa}, \quad \nu = 0.2$$

Intensywność obciążenia:

$$q_0 = 10\,\mathrm{kPa}$$

Warunki brzegowe: płyty swobodnie podparte

# Płyta trójkątna




(a) (b)

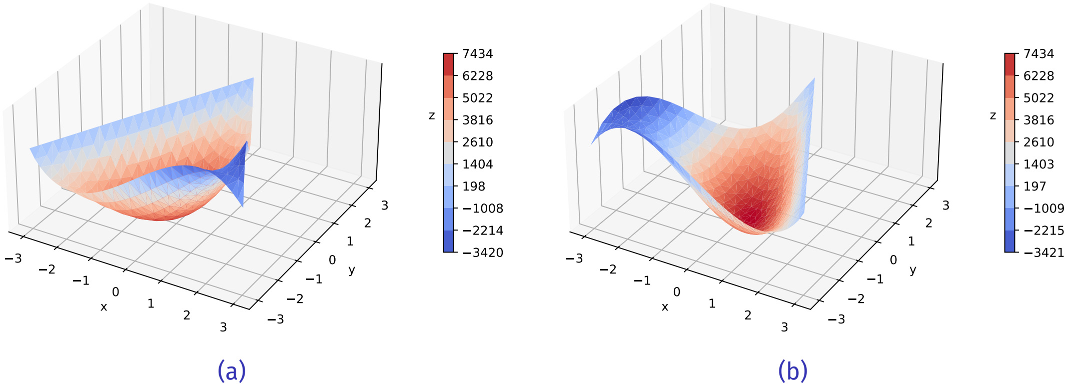
Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty trójkątnej (a) dla równomiernego i (b) losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

# Porównanie wyników

Tabela: Minimalne i maksymalne wartości kinematycznych i statycznych wielkości wraz z ich błędem względnym (RE) dla swobodnie podpartej płyty trójkątnej z równomiernym i losowym rozkładem węzłów powierzchniowych

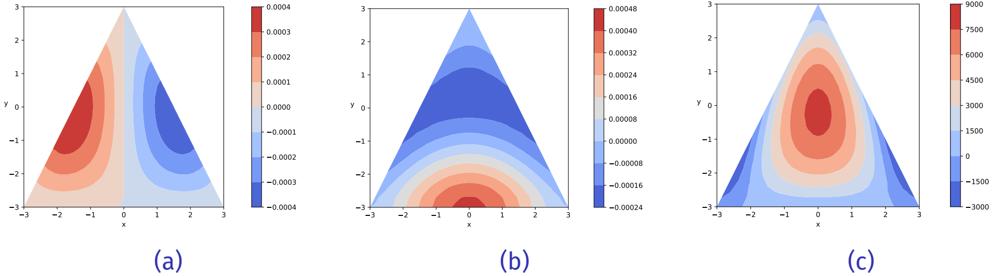
| | | Równomierny | | Losowy | | RE | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Fun.** | **Jend.** | **Min** | **Max** | **Min** | **Max** | **Min** | **Max** |
| $w$ | m | 0 | 0.000 473 6 | 0 | 0.000 473 7 | 0 % | 0.01 % |
| $\varphi_1$ | rad | -0.000 389 | 0.000 389 | -0.000 390 | 0.000 390 | 0.08 % | 0.08 % |
| $\varphi_2$ | rad | -0.000 206 | 0.000 424 | -0.000 208 | 0.000 423 | 0.57 % | 0.22 % |
| $M_{11}$ | N m/m | -2850.40 | 8006.10 | -2872.85 | 7973.67 | 0.79 % | 0.41 % |
| $M_{22}$ | N m/m | -2535.65 | 7019.75 | -2538.61 | 7001.34 | 0.12 % | 0.26 % |
| $M_{12}$ | N m/m | -3583.30 | 3584.22 | -3579.05 | 3579.76 | 0.12 % | 0.12 % |
| $Q_1$ | N m$^{-1}$ | -12 499.10 | 12 495.14 | -12 508.10 | 12 504.25 | 0.07 % | 0.07 % |
| $Q_2$ | N m$^{-1}$ | -6252.21 | 13 803.93 | -6257.24 | 13 789.06 | 0.08 % | 0.11 % |
| $V_1$ | N m$^{-1}$ | -14 982.12 | 14 976.67 | -14 989.79 | 14 983.69 | 0.05 % | 0.05 % |
| $V_2$ | N m$^{-1}$ | -9220.07 | 16 746.01 | -9220.07 | 16 722.39 | 0 % | 0.14 % |

# Płyta trójkątna



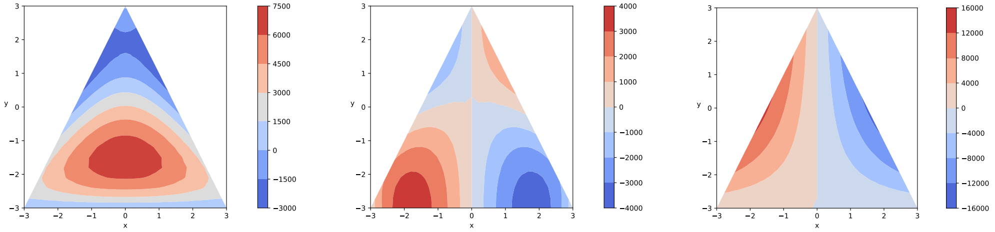

Rysunek: Wykres 3D momentu $M_n$ płyty trójkątnej (a) $\alpha = 153°$ i (b) $\alpha = 27°$

# Płyta trójkątna




Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) $\phi_1$, (b) $\phi_2$ i momentów zginających (c) $M_{11}$ płyty trójkątnej

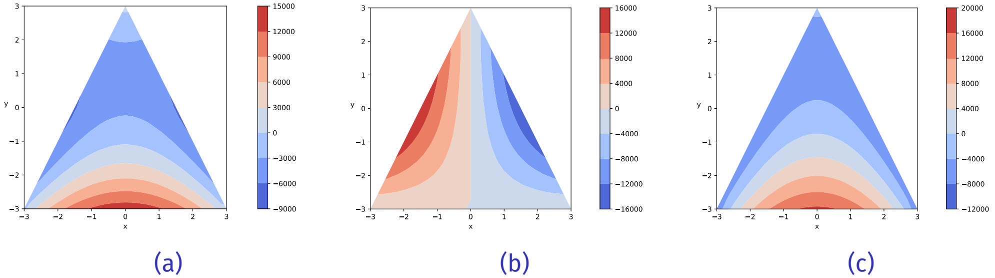
# Płyta trójkątna




(a) (b) (c)

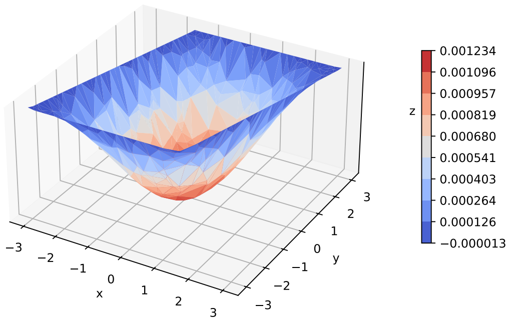
Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) $M_{22}$, momentów skręcających (b) $M_{12}$ i sił tnących (c) $Q_1$ płyty trójkątnej

# Płyta trójkątna



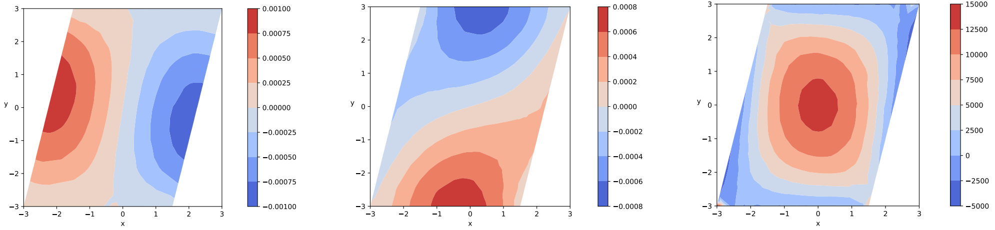

Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) $Q_2$ i uogólnionych sił tnących (b) $V_1$, (c) $V_2$ płyty trójkątnej

# Płyta równoległoboczna




Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty równoległobocznej dla losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

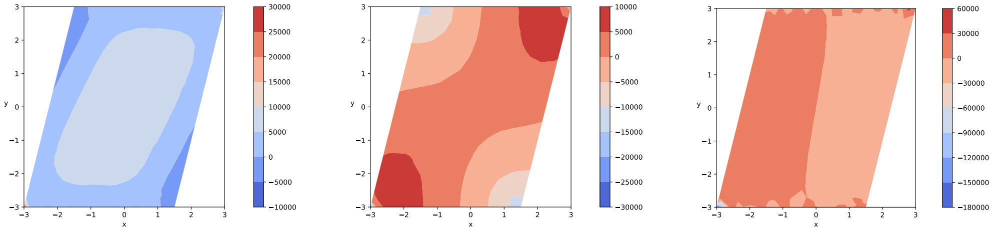
# Płyta równoległoboczna




(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) $\phi_1$, (b) $\phi_2$ i momentów zginających (c) $M_{11}$ płyty równoległobocznej

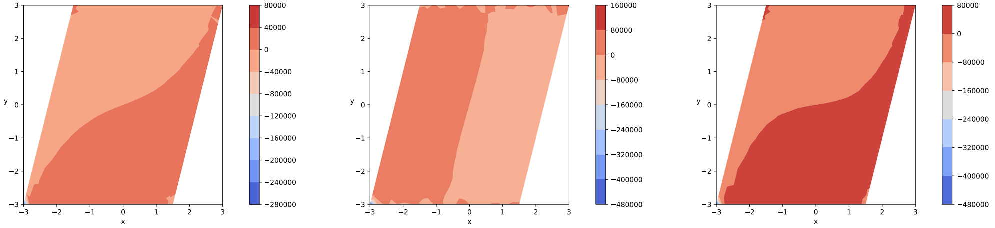
# Płyta równoległoboczna




(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) $M_{22}$, momentów skręcających (b) $M_{12}$ i sił tnących (c) $Q_1$ płyty równoległobocznej

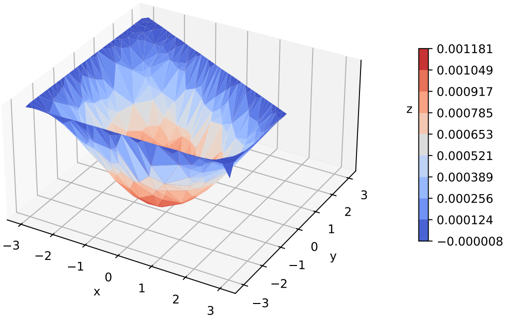
# Płyta równoległoboczna




(a) (b) (c)

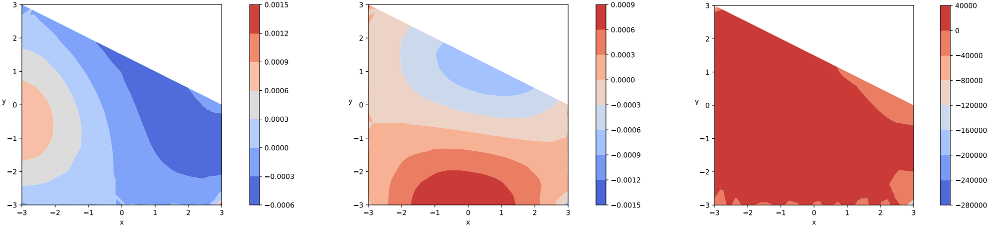
Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) $Q_2$ i uogólnionych sił tnących (b) $V_1$, (c) $V_2$ płyty równoległobocznej

# Płyta trapezowa




Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty trapezowej dla losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

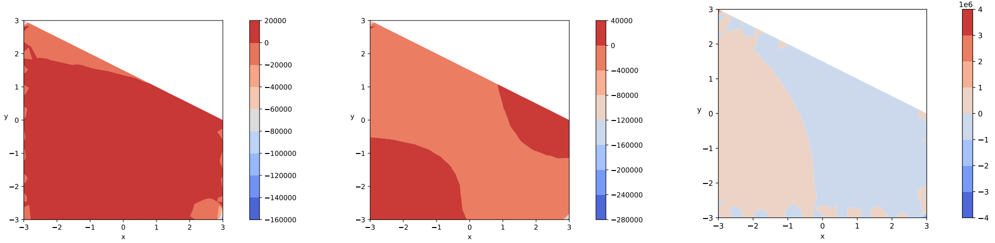
# Płyta trapezowa




(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) $\phi_1$, (b) $\phi_2$ i momentów zginających (c) $M_{11}$ płyty trapezowej

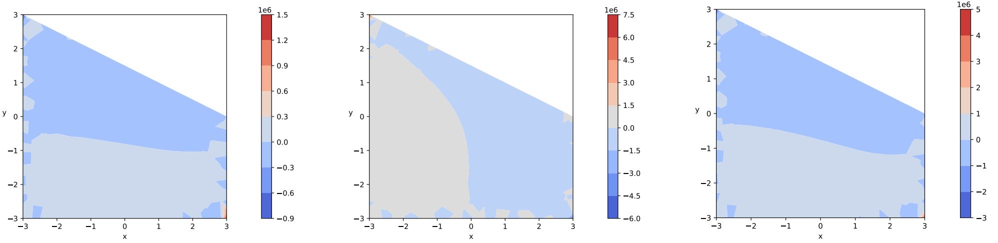
# Płyta trapezowa




(a) (b) (c)

**Rysunek:** Wykresy 2D momentów zginających (a) $M_{22}$, momentów skręcających (b) $M_{12}$ i sił tnących (c) $Q_1$ płyty trapezowej

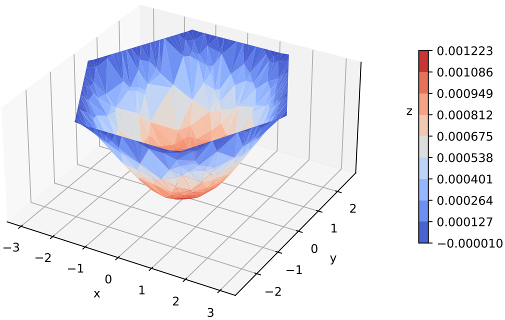
# Płyta trapezowa




(a) (b) (c)

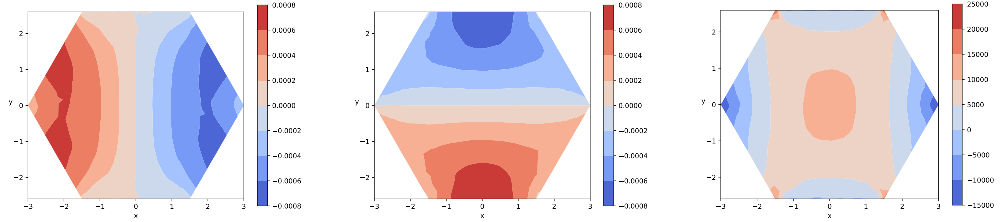
Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) $Q_2$ i uogólnionych sił tnących (b) $V_1$, (c) $V_2$ płyty trapezowej

# Płyta sześciokątna




Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty sześciokątnej dla losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

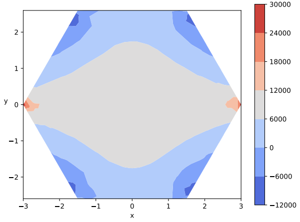
# Płyta sześciokątna



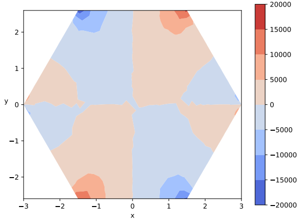

(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) $\phi_1$, (b) $\phi_2$ i momentów zginających (c) $M_{11}$ płyty sześciokątnej

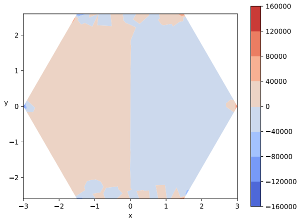
# Płyta sześciokątna




(a)



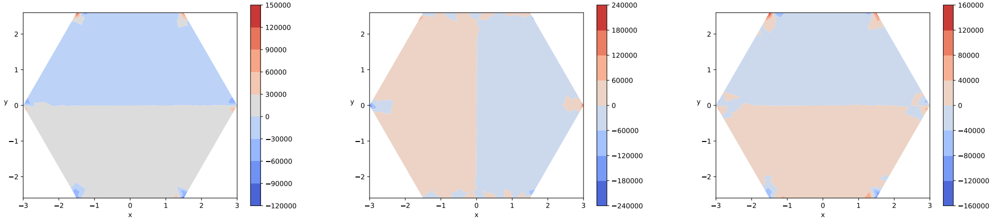

(b)




(c)

Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) $M_{22}$, momentów skręcających (b) $M_{12}$ i sił tnących (c) $Q_1$ płyty sześciokątnej

# Płyta sześciokątna




(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) $Q_2$ i uogólnionych sił tnących (b) $V_1$, (c) $V_2$ płyty sześciokątnej

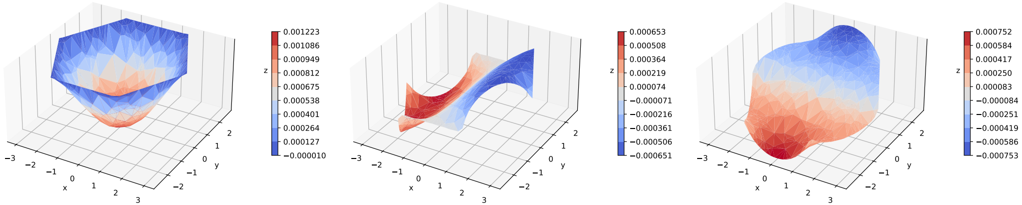
# Wnioski

- Opracowana metoda pozwala rozwiązywać zagadnienie zginania cienkich, izotropowych płyt wielokątnych
- Metoda jest uniwersalna, tzn. pozwala na rozwiązanie konstrukcji płytowych o różnych konfiguracjach
- Metoda jest automatyczna, tzn. pozwala uzyskać komplet wyników wyłącznie przez zmianę parametrów wejściowych
- Warunki brzegowe są spełnione z wysoką dokładnością w oddzielnych węzłach brzegowych

# Problemy

- W narożnikach (zwłaszcza gdy płyta zawiera kąty rozwarte) pojawiają się znane problemy związane z występowaniem osobliwości w tych punktach
- Problemy te objawiają się skokami wartości w narożnikach i/lub w ich pobliżu
- Obserwujemy zależność pomiędzy rzędem pochodnej ugięcia, która wchodzi do wyrażenia poszukiwanej wielkości
- Im wyższa pochodna ugięcia, tym większe skoki wartości w okolicach narożników

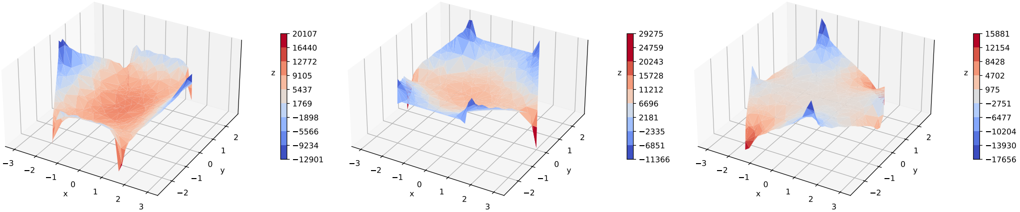
# Płyta sześciokątna




(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 3D ugięcia (a) i kątów obrotu (b) $\phi_1$, (c) $\phi_2$ płyty sześciokątnej

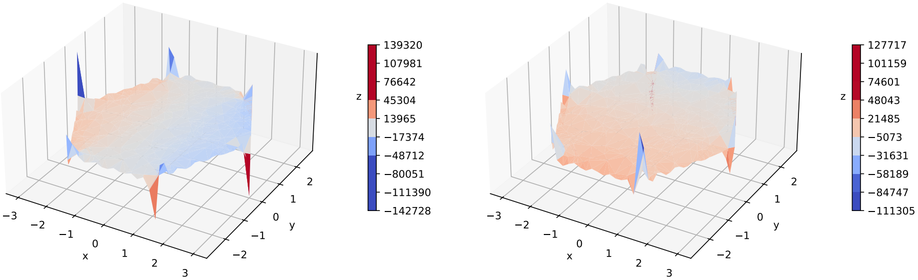
# Płyta sześciokątna




(a) (b) (c)

Rysunek: Wykresy 3D momentów zginających (a) $M_{11}$ (b) $M_{22}$ i skręcających (c) $M_{12}$ płyty sześciokątnej

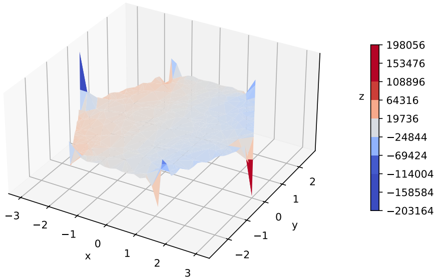
# Płyta sześciokątna



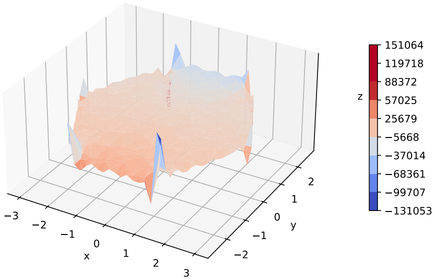

(a) (b)

Rysunek: Wykresy 3D sił tnących (b) $Q_1$, (b) $Q_2$ płyty sześciokątnej

# Płyta sześciokątna




(a)




(b)

Rysunek: Wykresy 3D uogólnionych sił tnących (a) $V_1$, (b) $V_2$ płyty sześciokątnej

# Kierunki dalszego rozwoju metody

- Wyeliminowanie osobliwości w narożnikach
- Opracowanie/wdrożenie metody równomiernego rozmieszczenia węzłów np. algorytm Lloyda
- Zastosowanie do płyt o kształtach wielokątów wklęsłych (wymaga wprowadzenia pewnych modyfikacji w rozkładzie węzłów)

Dziękuję za uwagę